

# Inversa generalizada. Aplicaciones.

## 0.- INTRODUCCIÓN.

En esta práctica vamos a revisar los conceptos de matrices de rango pleno a derecha o izquierda. Calcularemos las inversas laterales cuando existan y la inversa generalizada de Moore-Penrose. Además usaremos lo anterior para calcular las soluciones mínimo-cuadráticas y las soluciones mínimo cuadráticas de norma mínima de un sistema incompatible. Otra aplicación que veremos será el cálculo de la curva que mejor aproxima los datos de una tabla estadística por mínimos cuadrados.

Para toda esta práctica necesitamos usar el programa, visto en el primer cuatrimestre, que nos calcula el rango de una matriz:

```
In[1]:= rango[A_]:=Module[{n,m,s,rg},
    n=Dimensions[A][[1]];
    m=Dimensions[A][[2]];
    k=Min[n,m];
    If[n==m && Det[A]!=0,rg=k,
    For[i=k, i>=1,i--,s=Minors[A,i];
        If[s!=Table[0,{j1,Dimensions[s][[1]]},
            {j2,Dimensions[s][[2]]}],rg=i;Break[[]]];
    Print[rg]]
```

¡OJO!, cada vez que trabajemos con esta práctica tendremos que ejecutar previamente el programa anterior.

En las últimas versiones de matemática ya existe una orden que nos hace lo anterior, la orden **MatrixRank**[*matriz*] que nos devuelve el rango de *matriz*. Por tanto, es posible usar este nuevo comando, evitando así que se nos olvide cargar el procedimiento anterior.

## 1. RANGO PLENO POR FILAS O POR COLUMNAS. MATRICES INVERSAS LATERALES.

Dada una matriz de orden  $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$$

Se dice que  $A$  es de **rango pleno por filas** si  $\text{rg}(A) = m$ , esto es, el rango de  $A$  es igual al número de filas ( $C(A) = \mathbb{R}^m$ ). Análogamente se dice que  $A$  es de **rango pleno por columnas** si  $\text{rg}(A) = n$  ( $F(A) = \mathbb{R}^n$ ). Para una matriz cuadrada son equivalentes ser de rango pleno por filas, ser de rango pleno por columnas y ser regular.

Dada una matriz  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , una **inversa a derecha** de  $A$  es una matriz  $B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$  de forma que  $AB = I_m$ . De forma similar, una **inversa a la izquierda** de  $A$  es una matriz  $C \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$  tal que  $CA = I_n$ .

### Proposición

Dada una matriz  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , se verifica:

1.  $A$  tiene inversa a izquierda  $\Leftrightarrow A$  es de rango pleno por columnas.
2.  $A$  tiene inversa a derecha  $\Leftrightarrow A$  es de rango pleno por filas.

### Teorema

Dada una matriz  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , se verifica:

1. Si  $A$  es de rango pleno por filas, entonces una inversa a derecha de  $A$  es  $A^R = A^t(AA^t)^{-1}$ .
2. Si  $A$  es de rango pleno por columnas, entonces una inversa a izquierda de  $A$  es  $A^L = (A^tA)^{-1}A^t$ .

## 2. INVERSA GENERALIZADA DE MOORE-PENROSE.

Dada una matriz  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , una **inversa generalizada de Moore-Penrose** de  $A$  es una matriz  $X$  de orden  $n \times m$  de forma que:

1.  $AXA = A$ .
2.  $XAX = X$ .
3.  $AX$  y  $XA$  son simétricas.

### Proposición

Para cada matriz  $A$ , si existe inversa de Moore-Penrose de  $A$ , esta es única. A tal matriz se le nota por  $A^+$ .

Observar que si  $A$  es regular, entonces  $A^+ = A^{-1}$ , si  $A$  es de rango pleno por filas, entonces  $A^+ = A^R$  y si  $A$  es de rango pleno por columnas, entonces  $A^+ = A^L$ .

Dada una matriz  $A$  de orden  $m \times n$ , llamaremos **factorización de rango pleno** de  $A$  a cada descomposición de  $A$  en producto de una matriz  $E$  de rango pleno por columnas y una matriz  $F$  de rango pleno por filas. Toda matriz posee una factorización de rango pleno,  $A = EF$ .

### Teorema

Toda matriz  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , tiene inversa generalizada de Moore-Penrose,

$$A^+ = F^R E^L$$

donde  $A = EF$  es una factorización de rango pleno.

**Ejemplo 12.1** Calcular la inversa generalizada de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Insertamos la matriz A y calculamos su rango:

**In[2]:**  $A = \{\{2,0,2,0\}, \{1,1,2,1\}, \{-1,3,2,3\}\};$

**In[3]:** **rango[A]** (o **MatrixRank[A]** )

**Out[3]:** 2

Por tanto no es regular, ni de rango pleno por filas, ni de rango pleno por columnas.  
Vamos a calcular la inversa de Moore-Penrose.

**In[4]:** **n=Dimensions[A][[1]];**  
**m=Dimensions[A][[2]];**  
**B=IdentityMatrix[n];**  
**c=Transpose[Join[Transpose[A],B]];**  
**h=RowReduce[c]**

**Out[4]:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

**In[5]:** **Q=Inverse[Table[h[[i,j]],{i,1,n},{j,m+1,m+n}]];**

**Out[5]:**

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

**In[3]:** **e= Table[Q[[i,j]],{i,1,n},{j,1,2}];**

```
f=Table[h[[i,j]],{i,1,2},{j,1,m}];
fR=Transpose[f].Inverse[f.Transpose[f]];
eL=Inverse[Transpose[e].e].Transpose[e];
fR.eL
```

Out[3]:=

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \frac{5}{3} & \frac{10}{1} & \frac{10}{9} \\ \frac{70}{11} & \frac{70}{4} & \frac{70}{1} \\ \frac{70}{-3} & \frac{35}{1} & \frac{35}{9} \\ \frac{70}{70} & \frac{70}{70} & \frac{70}{70} \end{pmatrix}$$

Si agrupamos todo lo anterior podemos crear un programa que nos calcule la inversa generalizada de cualquier matriz.

```
In[4]:= invgen[A_]:=Module[{rg,n,m,k,B,c,h,Q,e,f,fR,eL,ig},
  n=Dimensions[A][[1]];
  m=Dimensions[A][[2]];
  k=Min[n,m];
  If[n==m && Det[A]!=0,rg=k,
  For[i=k, i>=1,i--,s=Minors[A,i];
    If[s!=Table[0,{j1,Dimensions[s][[1]]},
    {j2,Dimensions[s][[2]]}],rg=i;Break[[]]];
  B=IdentityMatrix[n];
  c=Transpose[Join[Transpose[A],B]];
  h=RowReduce[c];
  Q=Inverse[Table[h[[i,j]],{i,1,n},{j,m+1,m+n}]];
  e=Table[Q[[i,j]],{i,1,n},{j,1,rg}];
  f=Table[h[[i,j]],{i,1,rg},{j,1,m}];
  fR=Transpose[f].Inverse[f.Transpose[f]];
  eL=Inverse[Transpose[e].e].Transpose[e];
  ig=fR.eL;
  Print["El rango de A es ", rg];
  Print["La factorización de rango pleno de A es ",
  A," = ", e, " . ", f];
  Print["La inversa generalizada de A es ", ig] ]
```

In[5]:= invgen[A]

Out[5]:= El rango de A es 2

La factorización de rango pleno de A es



Dado un sistema de ecuaciones lineales  $AX = B$  con  $S$  de rango pleno por filas, el sistema es compatible y la solución de norma mínima viene dada por  $X = A^R B$ .

### **Teorema**

Dado un sistema de ecuaciones lineales  $AX = B$  (compatible o incompatible), la solución mínimo-cuadrática de norma mínima viene dada por  $X = A^+ B$ .

**Ejemplo 12.2** Calcular la solución mínimo-cuadrática de norma mínima del sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

*In[1]:*  $A = \{\{1,2\},\{1,2\}\};$   
 $b = \{3,4\};$

*In[2]:*  $\text{invgen}[A]$

*Out[2]:* El rango de  $A$  es 1  
 La factorización de rango pleno de  $A$  es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La inversa generalizada de  $A$  es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

*In[3]:*  $IG = \{\{1/10,1/10\},\{1/5,1/5\}\};$   
 $IG.b$

*Out[3]:*  $\{\frac{7}{10} \quad \frac{7}{5}\}$



## **4. PROBLEMAS DE MÍNIMOS CUADRADOS.**

Nos planteamos el siguiente problema en el que partimos de datos empíricos de una variable  $y$  a partir de otra  $x$

|     |       |       |       |     |       |
|-----|-------|-------|-------|-----|-------|
| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... | $x_n$ |
| $y$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | ... | $y_n$ |

y queremos encontrar una función polinómica  $y = p(x)$  de grado prefijado que aproxime estos datos. Como sabemos existe un único polinomio de grado  $n - 1$ , de forma que para cada  $i = 1, 2, \dots, n$  se tiene  $p(x_i) = y_i$ , que se calcula por interpolación de Lagrange. Si lo que buscamos es un polinomio de grado menor, podemos recurrir a la aproximación por mínimos cuadrados.

Si consideramos un polinomio de grado 1 (es decir una recta)  $y = ax+b$ , se trata de determinar  $a$  y  $b$  de forma que la norma  $\|y - (ax+b)\|$  sea mínima, o lo que es igual, que sea mínima la suma de cuadrados  $\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i - b))^2$ . Este problema se reduce a determinar la solución mínimo-cuadrática del sistema

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ ax_n + b = y_n \end{cases}$$

en las incógnitas  $a$  y  $b$ . La expresión matricial de este sistema es

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

si denotamos por  $A$  a la matriz de coeficientes, la solución vendrá dada por

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^L \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

En general, si se desea aproximar los datos por una función polinómica de grado  $k < n-1$ :

$$y = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$$

se obtiene el sistema

$$\begin{cases} a_k x_1^k + \dots + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ a_k x_2^k + \dots + a_1 x_2 + a_0 = y_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_k x_n^k + \dots + a_1 x_n + a_0 = y_n \end{cases}$$

en las incógnitas  $a_0, a_1, \dots, a_k$ . Este sistema se expresa matricialmente

$$\begin{pmatrix} x_1^k & \dots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^k & \dots & x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^k & \dots & x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

La matriz de coeficientes  $A$  de orden  $n \times (k+1)$  es de rango pleno por columnas, con la hipótesis de que  $k+1$  de los  $x_i$  sean distintos entre sí. Así pues el sistema tiene una única solución mínima-cuadrática que se obtiene por:

$$\begin{pmatrix} a_k \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = A^L \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

**Ejemplo 12.3**

Dados los datos

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 2 |
| y | 0 | 2 | 5 |

calcular la recta que mejor aproxima estos datos por mínimos cuadrados.

Consideramos la recta  $y = ax + b$ , evaluando los datos que tenemos se tiene el sistema:

$$\begin{cases} b = 0 \\ a + b = 2 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$$

luego la matriz  $A$  y el vector  $b$  serán:

```
In[4]:= A={{0,1},{1,1},{2,1}};
        b={0,2,5};
In[5]:= AL=Inverse[Transpose[A].A].Transpose[A];
        AL.b
```

```
Out[5]:= {5/2, -1/6}
```

Por tanto, la recta buscada es  $y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{6}$

